Université Mohammed Premier
ENSA d'Al-Hoceima
A. BOUJRAF

Filières : AP2
Matière : Analyse numérique
Année Universitaire : 18/19.

Devoir surveillé : Durée (1h30)

Exercice 1. Soient la matrice A et le vecteur colonne b donnés par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 10 \\ 1 & 10 & 18 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que A admet une décomposition de Cholesky.
2. Déterminer la décomposition de Cholesky de A, puis résoudre le système linéaire $Ax = b$.

Exercice 2. On considère le système linéaire $Ax = b$, où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} & 1 & \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}.$$

1. Justifier pourquoi la matrice A admet une décomposition LU.
2. Donner la décomposition LU de la matrice A.
3. Résoudre le système $Ax = b$ en utilisant la décomposition LU précédente.
4. En déduire l'inverse de la matrice A.

Exercice 3. On considère la fonction définie par $f(x) = cos(x) - xe^x$.

1. Monter que f possède un unique zéro α dans $[0, \frac{\pi}{2}]$.
2. a. Approcher α en utilisant la méthode de dichotomie avec deux itérations.
   b. Donner le nombre itérations nécessaire pour trouver une valeur approchée de α avec la précision 10^{-3} en utilisant la méthode de dichotomie.
3. a. Ecrire la méthode de Newton pour la recherche de la solution de $f(x) = 0$.
   b. Effectuer 5 itérations de la méthode de Newton (avec 4 décimales) à partir de $x_0 = 0$.
4. Numériquement, quelle est la méthode la plus rapide.
5. a. Vérifier que l'équation $f(x) = 0$ est équivalente au problème du point fixe de la fonction g définie par $g(x) = \frac{\cos(x)}{e^x}$.
   b. Montrer que les hypothèses d'application de la méthode de point fixe ne sont pas vérifiées sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$.
   c. Montrer qu'elles le sont sur l'intervalle $[0.4199, 0.6038]$.
   d. Combien de termes devrait-on calculer par la méthode du point fixe pour trouver une valeur approchée de α à 10^{-3} près ?

Université Mohammed Premier
ENSA d'Al-Hoceima.
A. BOUJRAF

Filières : AP2
Matière : Analyse numérique
Année Universitaire : 18/19.

Feuille de TD $n°3$

Exercice 1. Soient

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 6 & 3 & 6 & 8 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ 4 \\ 22 \end{pmatrix}.$$

Résoudre le système linéaire $Ax = b$ à l'aide la méthode de Gauss avec stratégie de pivotage partiel et déterminer P, L et U les facteurs de la décomposition $PA = LU$.

Exercice 2. Soit le système linéaire $Ax = b$ où :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

1. Ecrire le schéma itératif associé à la méthode de Jacobi permettant de donner $x^{(k+1)}$ en fonction de $x^{(k)}$ (On précisera la matrice B_J ainsi que le vecteur c_J). Puis montrer de deux façons différentes que la méthode de Jacobi est convergente pour le système $Ax = b$.
2. Ecrire les quatre premières itérations de la méthode de Jacobi en partant de $x^{(0)} = (0, 0, 0, 0)^t$. Puis montrer que $x^{(k)} = \frac{2^k - 1}{2^k} x^*$, où $x^* = (1, 1, 1, 1)^t$ est la solution exacte du système $Ax = b$.
3. Ecrire le schéma itératif associé à la méthode de Gauss-Seidel permettant de donner $x^{(k+1)}$ en fonction de $x^{(k)}$ (On précisera la matrice B_{GS} ainsi que le vecteur c_{GS}). La méthode de Gauss-Seidel est elle convergente pour ce système ? (Justifier votre réponse).

Exercice 3. Soit $a \in \mathbb{R}$ et

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que A est symétrique définie positive si et seulement si $-\frac{1}{2} < a < 1$.
2. Montrer que la méthode de *Jacobi* converge si et seulement si $-\frac{1}{2} < a < \frac{1}{2}$.

Exercice 4.

1. Etudier la convergence des méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel appliquées aux matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Que peut-on déduire ?

Université Abdelmalek Essaâdi
ENSA d'Al-Hoceima.
A. BOUJRAF

Filières : AP2
Matière : Analyse numérique
Année Universitaire : 18/19

Examen : Durée ($1h30$)

Questions de cours.
Quelles sont les deux types de méthodes vues dans le cours pour la résolution d'un système linéaire ? Donner la différence entre ces deux types de méthodes (avantages et incovénients).

Exercice 1.
On considère le système linéaire $Ax = b$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que A admet une décomposition LU que l'on déterminera. En déduire la résolution du système $AX = b$.
2. La méthode de *Jacobi* pour la résolution de ce système est-elle convergente ? Effectuer deux itérations de la méthode de *Jacobi* à partir de $x^{(0)} = (0,0,0)^t$.
3. La méthode de *Gauss-Seidel* pour la résolution de ce système est-elle convergente ? Effectuer deux itérations de la méthode de *Gauss-Seidel* à partir de $x^{(0)} = (0,0,0)^t$.

Exercice 2.

1. Ecrire le polynôme $p(x) = 1 - x + x^2$ dans la base de *Lagrange* associée aux points $-1, 2, 3$.
2. Ecrire dans la base de *Lagrange* le polynôme q qui vaut $-55, 104, 1.063$ en $-1, 2, 3$.
3. Ecrire le polynôme $p(x) = 1 - x + x^2$ dans la base de *Newton* associée aux points $-1, 2, 3$.
4. Trouver r le polynôme qui vaut $3, 3, 7, 8$ en $-1, 2, 3, 4$.
5. Quels sont les "avantages" et les "inconvenants" des bases de *Lagrange* et de *Newton* ?

Exercice 3.
Soient $N \in \mathbb{N}$, f la fonction définie sur $[1, 2]$ par $f(x) = \sqrt{x}$, $x_j = 1 + jh$ où $j = 0, 1, \ldots, N$ et $h = \frac{1}{N}$. Soit également $i \in \{1, 2, \ldots, N-1\}$ et P_i le polynôme interpolant f en x_{i-1}, x_i, x_{i+1}. Pour $x \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$ et $t \in [i-1, i+1]$, on pose $x = 1 + th$, $g_i(x) = (x - x_{i-1})(x - x_i)(x - x_{i+1})$ et $\phi_i(t) = (t - i + 1)(t - i)(t - i - 1)$.

1. Donner l'expression de l'erreur d'interpolation $e_i(x) := f(x) - P_i(x)$ puis montrer que $|e_i(x)| \leq \frac{h^3}{8}$.
2. Etablir le tableau de variation de la fonction $t \longmapsto \phi_i(t)$ pour $t \in [i-1, i+1]$.
3. Vérifier que $g_i(x) = h^3 \phi_i(t)$ et en déduire que $|e_i(x)| \leq \frac{h^3}{24\sqrt{3}}$ pour tout $x \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$.
4. Comment choisir N pour que l'erreur d'interpolation soit inférieur ou égale à $\varepsilon = 5.10^{-8}$.

Université Abdelmalek Essaadi
ENSAH D'AL-Hoceima
A.P., Première année
Année universitaire 2018/2019

Épreuve du Module AP21 : "Algèbre Linéaire".

Devoir surveillé 1, Durée : 2 heures.

N.B. : Il sera tenu compte de la rédaction, la justification de réponses et la clarté de l'écriture.

Exercice 1 *(12 points)*

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n sur le corps commutatif $\mathbb{K}$, soit u un endomorphisme de E. On pose $u^0 = id_E$ et on définit par récurrence u^n ($n \in \mathbb{N}$) en posant pour tout entier naturel k, $u^{k+1} = u \circ u^k$. Si $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ est un élément de $\mathbb{K}[X]$, on pose

$$P(u) = \sum_{k=0}^{n} a_k u^k \quad \mathrm{N}_P = \mathrm{Ker}(P(u)) \quad \text{et} \quad \mathrm{I}_p = \mathrm{Im}(P(u)).$$

1. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, montrer que pour tout $Q \in \mathbb{K}[X]$, on a $Q(u) \in \mathscr{L}(E)$.
2. Soit Q un polynôme et P un polynôme qui le divise. Montrer que
$$\mathrm{N}_P \subset \mathrm{N}_Q \quad \text{et} \quad \mathrm{I}_Q \subset \mathrm{I}_P$$
3. Soient A et B deux polynômes et D est le p.g.c.d de A et B ($D = \cancel{\text{p.g.c.d}}(A, B)$). Montrer qu'on a :
$$\mathrm{N}_A \cap \mathrm{N}_B = \mathrm{N}_D \quad \text{et} \quad \mathrm{I}_A + \mathrm{I}_B = \mathrm{I}_D.$$
(**Indication :** utiliser le fait qu'il existe deux polynômes U et V dans $\mathbb{K}[X]$ tels que $D = UA + VB$)
4. Dans ce qui suit, on suppose que $P(u) = 0_{E,E}$ est l'endomorphisme nul et que $P = P_1 P_2$ où P_1 et P_2 sont deux polynômes premiers entre eux.
   (a) Montrer que $\mathrm{N}_{P_1} \cap \mathrm{N}_{P_2} = \{0_E\}$ et $\mathrm{I}_{P_1} + \mathrm{I}_{P_2} = E$.
   (b) Montrer que $\mathrm{I}_{P_2} \subset \mathrm{N}_{P_1}$ et $\mathrm{I}_{P_1} \subset \mathrm{N}_{P_2}$.
   (c) En déduire que $E = \mathrm{N}_{P_1} \oplus \mathrm{N}_{P_2}$ et que $E = \mathrm{I}_{P_1} \oplus \mathrm{I}_{P_2}$.
   (d) Montrer que : $\dim(\mathrm{N}_{P_2}) \leq \dim(\mathrm{I}_{P_1})$, et en déduire que $\mathrm{I}_{P_2} = \mathrm{N}_{P_1}$ et $\mathrm{I}_{P_1} = \mathrm{N}_{P_2}$.

Exercice 2 *(8 points)*

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. soit $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme de E tel que

$$f^2 = f \circ f = f, \quad f \neq 0_{E,E} \quad \text{et} \quad f \neq id_E.$$

On pose $E_0 = \{x \in E \,/\, f(x) = 0_E\}$ et $E_1 = \{x \in E \,/\, f(x) = x\}$.

1. Montrer que E_0 et E_1 sont deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.
2. Montrer que E_0 et E_1 sont supplémentaires dans E. Que peut on dire de f lorsque E est de dimension finie ?

3. En déduire que l'ensemble $\mathscr{S} = \{g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, g'' - g' = 0\}$ est un espace vectoriel de dimension 2 sur $\mathbb{R}$.
4. Que pouvez-vous dire si $f^2 = f \circ f = id_E$, $f \neq id_E$ et $f \neq -id_E$.
Dans ce cas, donner une base de $\mathscr{S} = \{g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, g'' - g' = 0\}$.

A

INDH

Université Abdelmalek Essaadi
ENSAH D'AL-Hoceima
A.P., Première année
Année universitaire 2018/2019

Épreuve du Module AP21 : "Algèbre Linéaire".
Examen, Durée : 2 heures.

N.B. : Il sera tenu compte de la rédaction, la justification de réponses et la clarté de l'écriture.

Exercice 1 *(8 points)*
Soient l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice relativement à la base canonique $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ est

$$M = \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le déterminant de la matrice M. Que peut-on en déduire ?
2. Justifier que u est un isomorphisme d'espace vectoriel, puis déterminer u^{-1} relativement à la base canonique $\mathcal{B}$.
3. Soit $e'_1 = 2e_1 + 3e_2 + e_3$, $e'_2 = 3e_1 + 4e_2 + e_3$ et $e'_3 = e_1 + 2e_2 + 2e_3$,
   (a) Montrer que le système $\mathcal{B}' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$ forme une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Soit $E = (e_1, e_2, e_3)^T$ et $E' = (e'_1, e'_2, e'_3)^T$, déterminer la matrice A telle que $E' = AE$.
   (c) Calculer A^{-1}, puis en déduire e_1, e_2 et e_3 en fonction de e'_1, e'_2 et e'_3.
4. Calculer $u(e'_1)$, $u(e'_2)$ et $u(e'_3)$ en foncction de e'_1, e'_2 et e'_3, puis en déduire la matrice de u relativement à la base $\mathcal{B}'$.

Exercice 2 *(7 points)*
Soit E l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 de $\mathbb{R}[X]$. Soit $\Phi_{\lambda,\mu}$ l'application linéaire définie de E dans lui-même par :

$$\forall P \in E \ : \ \Phi_{\lambda,\mu}(P) = (X^2 + \lambda)P'' + (\mu X + 1)P', \quad \text{où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad P' \text{ est la dérivée de } P.$$

1. (a) Calculer $\Phi_{\lambda,\mu}(1)$, $\Phi_{\lambda,\mu}(X)$ et $\Phi_{\lambda,\mu}(X^2)$.
   (b) Déterminer la matrice $A_{\lambda,\mu}$ de $\Phi_{\lambda,\mu}$ relativement à la base $\{1, X, X^2\}$ de E.
   (c) Déterminer $\mathrm{Ker}(\Phi_{\lambda,\mu})$ et discuter sa dimension suivant les valeurs de λ et μ.
2. On fixe $\mu = -1$ et on pose $f_\lambda = \Phi_{\lambda,-1}$
   (a) soit $P \in E$, calculer $(f_\lambda(P))'$, puis $(f_\lambda(P))''$ en fonction de P' et P''.
   (b) En déduire que : $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \cdot f_{\lambda_2} \circ f_{\lambda_1} = -f_{-1}$.
   (c) Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, calculer $(f_\lambda)^n$ en fonction de f_{-1}, puis déterminer une base $\{1, P_1, P_2\}$ de E telle que $P_1 \in \mathrm{Im}((f_\lambda)^n)$ et $P_2 \in \mathrm{Ker}((f_\lambda)^n)$.

Exercice 3 *(5 points)*

Soit a un réel non nul fixé. On considère les trois fonctions réelles $t \mapsto x(t)$, $t \mapsto y(t)$ et $t \mapsto z(t)$ définies par les conditions initiales $x(0) = 2$, $y(0) = 3$ et $z(0) = 1$ et le système d'équations différentielles linéaires suivant :

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} x' &= ax + a^2y - a^2z \\ y' &= (a-1)x \\ z' &= ax + ay - az \end{cases}$$

Soit le vecteur $X(t)$ défini par $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$

1. Écrire le système $(\mathcal{S})$ sous forme matricielle.
2. Soit A la matrice du système $(\mathcal{S})$. Calculer A^2 et A^3. Que peut-on en déduire ?
3. Calculer la matrice $M = \exp(tA)$, puis en déduire la forme générale de la solution du système $(\mathcal{S})$.
4. Déterminer les fonctions $t \mapsto x(t)$, $t \mapsto y(t)$ et $t \mapsto z(t)$ solutions du système $(\mathcal{S})$.

Université Abdelmalek Essaadi
ENSAH D'AL-Hoceima
A.P., Première année
Année universitaire 2018/2019

Épreuve du Module AP21 : "Algèbre Linéaire".

Session de Rattrapage, Durée : 2 heures.

N.B. : Il sera tenu compte de la rédaction, la justification de réponses et la clarté de l'écriture.

Exercice 1 *(7 points)*

Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, muni de sa base canonique $\mathbb{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$, on considère l'application f définie par

$$\begin{cases} f(e_1) &= -e_2 - \sin(\theta)e_3 \\ f(e_2) &= e_1 + \cos(\theta)e_3 \\ f(e_3) &= -\sin(\theta)e_1 + \cos(\theta)e_2 \end{cases}$$

où θ est un nombre réel donné. On rappelle que $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ et $e_3 = (0,0,1)$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
2. (a) Calculer la matrice M de f par rapport à la base $\mathbb{B}$.
   (b) Calculer $M^2 = M.M$ et M^3 et en déduire que $f \circ f \circ f = f^3 = 0$ où 0 est l'application nulle.
3. A tout réel t on associe l'application linéaire $g_t = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3} + tf + \frac{1}{2}t^2 f^2$ où $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ est l'application identique de $\mathbb{R}^3$.
   (a) Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}$, on a $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(f \circ g_t)$.
   (b) Montrer que $\forall \mathrm{r}, t \in \mathbb{R}$, on a $g_{\mathrm{r}} \circ g_t = g_{\mathrm{r}+t}$.
   (c) En déduire que $\forall t \in \mathbb{R}$, g_t est une application linéaire bijective de $\mathbb{R}^3$.
4. On pose $e'_1 = \cos(\theta)e_1 + \sin(\theta)e_2$, $e'_2 = f(e_1)$ et $e'_3 = f(e_2)$.
   (a) Montrer que $\mathbb{B}' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Donner la matrice de passage de $\mathbb{B}'$ à $\mathbb{B}$.

Exercice 2 *(7 points)*

Soit E l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 de $\mathbb{R}[X]$. Soit $\Phi_{\lambda,\mu}$ l'application linéaire définie de E dans lui-même par :

$$\forall P \in E \,:\, \Phi_{\lambda,\mu}(P) = (X^2 + \lambda)P'' + (\mu X + 1)P', \quad \text{où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad P' \text{ est la dérivée de } P.$$

1. (a) Calculer $\Phi_{\lambda,\mu}(1)$, $\Phi_{\lambda,\mu}(X)$ et $\Phi_{\lambda,\mu}(X^2)$.
   (b) Déterminer la matrice $A_{\lambda,\mu}$ de $\Phi_{\lambda,\mu}$ relativement à la base $\{1, X, X^2\}$ de E.
   (c) Déterminer $\mathrm{Ker}(\Phi_{\lambda,\mu})$ et discuter sa dimension suivant les valeurs de λ et μ.
2. On fixe $\mu = -1$ et on pose $f_\lambda = \Phi_{\lambda,-1}$
   (a) soit $P \in E$, calculer $(f_\lambda(P))'$, puis $(f_\lambda(P))''$ en fonction de P' et P''.
   (b) En déduire que : $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} : f_{\lambda_2} \circ f_{\lambda_1} = -f_{-1}$.

(c) Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, calculer $(f_\lambda)^n$ en fonction de f_{-1}, puis déterminer une base $\{1, P_1, P_2\}$ de E telle que $P_1 \in \mathrm{Im}((f_\lambda)^n)$ et $P_2 \in \mathrm{Ker}((f_\lambda)^n)$.

Exercice 3 *(6 points)*

Soit a un réel non nul fixé. On considère le système de 4 équations linéaires suivant :

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} a^2x + ay + z &= 1 \\ ax + a^2y + t &= 1 \\ x + a^2z + at &= -1 \\ y + az + a^2t &= 1 \end{cases}$$

Soit le vecteur X défini par $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$

1. Quelle est la nature du système "déterminé", "sous-déterminé" ou "sur-déterminé" ? **Justifier.**
2. Écrire le système $(\mathcal{S})$ sous la forme matricielle et la forme vectorielle.
3. Soit A la matrice du système $(\mathcal{S})$. Calculer le déterminant $\det(A)$ de A, factoriser le et puis en déduire que la matrice A est inversible si et seulement si $a \notin \{-\frac{1+\sqrt{5}}{2}; \frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{-1+\sqrt{5}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\}$.
4. Supposons que A est inversible. Par la méthode d'élimination de Gauss, déterminer la factorisation LU de la matrice A ; puis résoudre le système $(\mathcal{S})$. L'ensemble de soulutions est-il un sous-espace vectoriel ?
5. Traiter les cas où $a \in \{-\frac{1+\sqrt{5}}{2}; \frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{-1+\sqrt{5}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\}$.